磁化Mと磁場Hについて*

永井佑紀

平成17年5月20日

このNoteではガウス単位系を用いている。

1 磁化とはなんだろうか

1.1 超伝導体での磁化とはなんだろうか

こう思ったそもそもの動機は、「電磁気学」(ランダウ=リフシッツ)の超伝導体に関するセクションを読んだときに生じた。ランダウはこう述べている。

「理論的考察の中に磁化 $\boldsymbol{M}$ やベクトル $\boldsymbol{H}$ を導入しても物理的意味はない」

と。これは一体どういう意味なのか? それがわからなかったのである。通常、超伝導体に関して議論をするときは、

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M} \tag{1}$$

という関係式において $\boldsymbol{B} = 0$ として、

$$\boldsymbol{M} = -\frac{\boldsymbol{H}}{4\pi} \tag{2}$$

として磁化を決める。これがマイスナー効果が生じているときの磁化であると言ったりするのである。しかしランダウは「物理的意味はない。便宜的に導入しているのである」と述べている。では、ここで決めた $\boldsymbol{M}$ は、一体何なのだろうか? 以下、「超伝導体の磁化」は「磁性体の磁化」とは異なる意味を持つというランダウの言葉の意味を探ろうと思う。

1.2 磁化の定義

超伝導体の磁化に関して議論するためには、まず通常の磁性体の磁化の定義を確認しなければならない。ランダウの「電磁気学」の第四章を参考にすることにしよう。

物質の中の定磁場は、微視的な方程式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{h} = 0,\ \mathrm{rot}\boldsymbol{h} = \frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\rho\boldsymbol{v} \tag{3}$$

を平均して得られる二つのマクスウェル方程式で書き表される。ここで、$\boldsymbol{h}$、$\boldsymbol{e}$ はそれぞれ微視的磁束密度と電束密度であり、ρ はキャリアの電荷密度、$\boldsymbol{v}$ は速度である。平均の磁場の強さを

$$\bar{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{B} \tag{4}$$

とすると、マクスウェル方程式は、

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0,\ \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\overline{\rho\boldsymbol{v}} \tag{5}$$

*このノートは加藤先生との議論を後日改めてまとめたものである。

となるだろう。誘電体や、全電流が存在しない時の金属の場合は、物体の任意の断面に対して

$$\int \bar{\rho}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f} = 0 \tag{6}$$

である。微視的電流密度が存在しても、和はゼロということである。

ここで、ストークスの定理との関連から、ベクトル $\bar{\rho}\boldsymbol{v}$ がほかのあるベクトルの回転の形で書かれるだろう。このベクトルをふつう $c\boldsymbol{M}$ であらわされる。つまり、

$$\bar{\rho}\boldsymbol{v} = c\,\mathrm{rot}\boldsymbol{M} \tag{7}$$

である。$\boldsymbol{M}$ の値は物体の内部でだけゼロでない。この条件を満たすと、物体を取り囲みつねにその外側を回っている曲線で限られた表面にそって積分を行うと

$$\int \bar{\rho}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f} = c\int \mathrm{rot}\boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \mathrm{c}\oint \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{8}$$

が得られる。このベクトル $\boldsymbol{M}$ は物体の磁化と呼ばれる。これを式 (5) に代入すると、

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = 0 \tag{9}$$

が得られる。

1.3 磁性体における磁化の物理的意味

物体の内部で運動するすべての荷電粒子によって生ずる全磁気モーメントを考えることにする。全磁気モーメントは

$$\frac{1}{2c}\int (\boldsymbol{r}\times\bar{\rho}\boldsymbol{v})dV = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{r}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{M})\mathrm{dV} \tag{10}$$

とかける。物体の外部では $\rho\boldsymbol{v}\equiv 0$ であるから、積分は物体を取り囲む任意の体積にわたってとってもよい。ここでひたすらベクトル解析の公式と部分積分を用いて変形していくと、

$$\frac{1}{2c}\int (\boldsymbol{r}\times\bar{\rho}\boldsymbol{v})dV = \int \boldsymbol{M}dV \tag{11}$$

が得られる。さて、ここで、磁化 $\boldsymbol{M}$ に対して三つの関係式が得られた。

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\boldsymbol{M} &= \frac{1}{c}\bar{\rho}\boldsymbol{v} && (12)\\ \boldsymbol{M} &= 0\ \ (\mathrm{outside}) && (13)\\ \frac{1}{2c}\int (\boldsymbol{r}\times\bar{\rho}\boldsymbol{v})dV &= \int \boldsymbol{M}dV && (14) \end{aligned}$$

この三つを満たすような $\boldsymbol{M}$ は

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c}\boldsymbol{r}\times\bar{\rho}\boldsymbol{v} + \nabla f \tag{15}$$

である。ここで f は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c}\int (\nabla f)dV &= 0 && (16)\\ \nabla f &= 0\ \ (\mathrm{outside}) && (17) \end{aligned}$$

を満たすような任意の関数である。

さて、∇f という任意性が残ってしまった。これは、物質内部においての $\boldsymbol{M}$ の境界条件がひとつ足りないために生じたものである。ここで、磁化ベクトルを「単位体積あたりの磁気モーメント」をあらわすものとしよう。つまり、$\nabla f = 0$ として

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c}\boldsymbol{r}\times\bar{\rho}\boldsymbol{v} \tag{18}$$

とするのである。

通常の磁性体においては、磁化は「単位体積あたりの磁気モーメント」ということになる。

1.4　超伝導体における磁化とは

超伝導体内部においてはマイスナー効果により、$\boldsymbol{B}=0$ が成り立っている。このとき式 (5) より

$$\bar{\rho}\boldsymbol{v}=0 \tag{19}$$

ということになる。これを認めると、式 (18) より磁化は超伝導体内部では

$$\boldsymbol{M}=0 \tag{20}$$

となる。

しかし、これは何を意味しているのだろうか。これでは、超伝導体での議論でよく使われる $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{M}=0$ の関係式が無意味になってしまう（$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}=0$ となってしまう）。

これが、ランダウの言っていた「通常の意味での磁化というものは導入しても物理的に無意味」ということだろう！

では、$\boldsymbol{M}=\frac{\boldsymbol{H}}{4\pi}$ の $\boldsymbol{M}$ とはなんだろうか。

1.5　磁化の空間依存性

マイスナー効果云々するときは、磁化は場所に依存しないということにしている。しかし、定義としての磁化は場所に依存している。これはどういうことだろうか。実は、非常に大きな超伝導体において、磁気進入長 $\lambda\to 0$ とすると、

$$\bar{\rho}\boldsymbol{v}=a\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\text{interface}})\ \ (a=const.) \tag{21}$$

なのである。ここで $\boldsymbol{r}_{\text{interface}}$ とは、試料表面をあらわす。つまり、表面付近においては $\bar{\rho}\boldsymbol{v}$ が 0 ではないということを示しているのである。磁化が場所に依存しないというのは、この場所依存性のある磁化を試料全体積でならした結果であったのである。

通常の磁性体においては、物体内部での円電流の和として表面に電流が流れると言ってよい。超伝導体においてはそうではない。物体内部での電流は存在せず、純粋に表面にのみ電流が流れているのである。**この表面電流を体積 V にわたって平均したものを通常の磁性体の時の磁化のように「便宜的に」導入したのが、$M=\frac{\boldsymbol{H}}{4\pi}$ なのである。**

よくテキストには「表面の薄い層に磁場が入り込むことを、まったく無視できる位十分な大きさを持った超伝導体だけを考えることにする」と書かれているが、これが間違いであるのは容易にわかる。「無視できる」のではなく、「デルタ関数的に磁場が入り込んでいるとする（$\lambda\to 0$)」なのである。